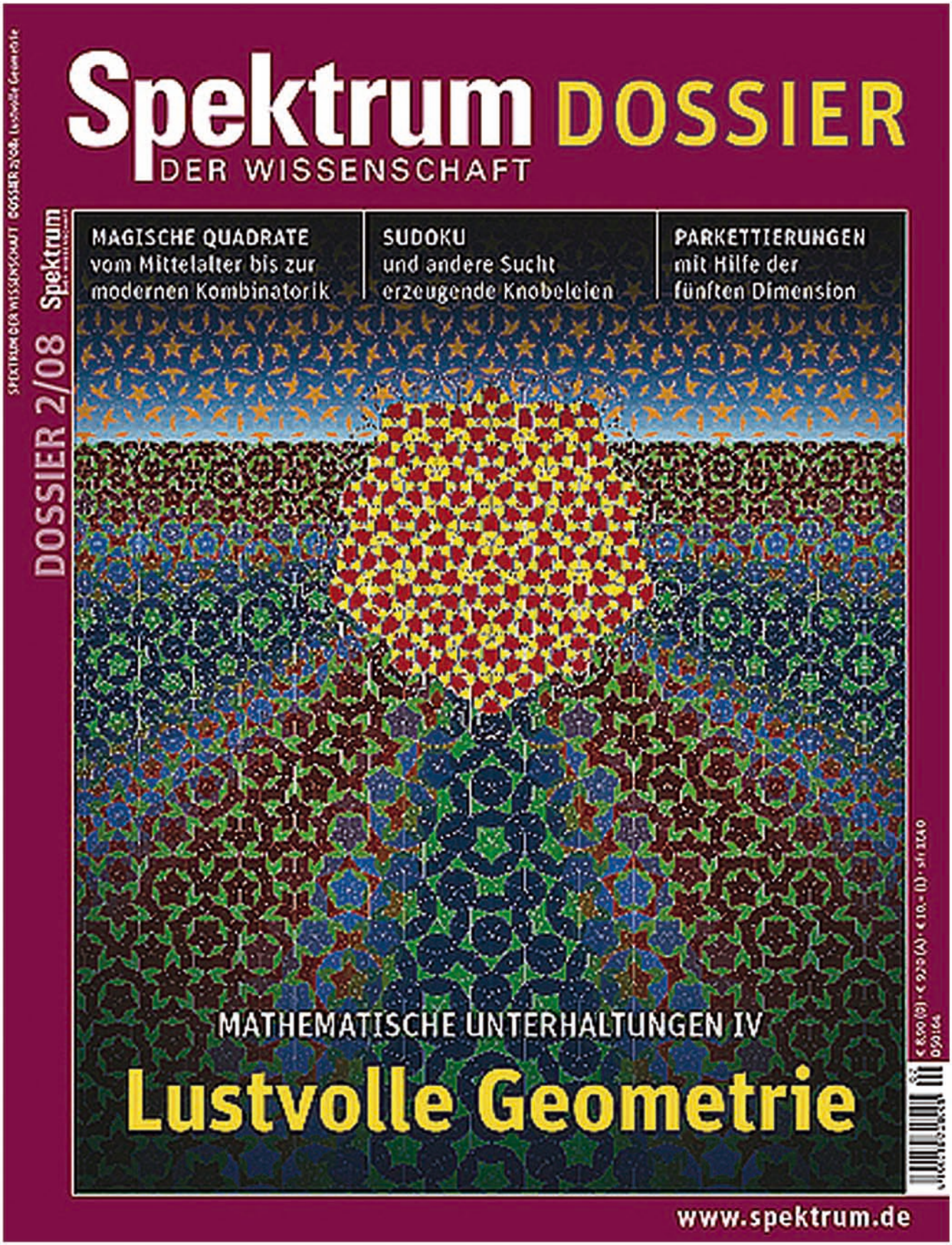

Spektrum DOSSIER
DER WISSENSCHAFT
DOSSIER 2/08
Spektrum der Wissenschaft
MAGISCHE QUADRATE
vom Mittelalter bis zur modernen Kombinatorik
SUDOKU
und andere Sucht erzeugende Knobeleien
PARKETTIERUNGEN
mit Hilfe der fünften Dimension
MATHEMATISCHE UNTERHALTUNGEN IV
Lustvolle Geometrie
www.spektrum.de

Edle magische Quadrate

Gewisse magische Quadrate haben eine innere Struktur, die es erlaubt, aus einem einzelnen magischen Quadrat viele andere zu machen.

Von Christoph Pöppe

Kann man ein Brett aus 5 · 5 quadratischen Feldern mit fünf Farben so kolorieren, daß jede pro Zeile und Spalte nur einmal vorkommt?

Das ist nicht schwer. Man verteilt die fünf Farben beliebig auf die Felder der ersten Zeile. Diese Anordnung kopiert man um ein Feld nach rechts versetzt in die nächste Zeile; das nach rechts überstehende Feld fügt man links in die Leerstelle dieser Zeile ein. In derselben Weise entsteht aus der zweiten Zeile die dritte, und so weiter. Diese Methode funktioniert für Quadrate jeder Größe.

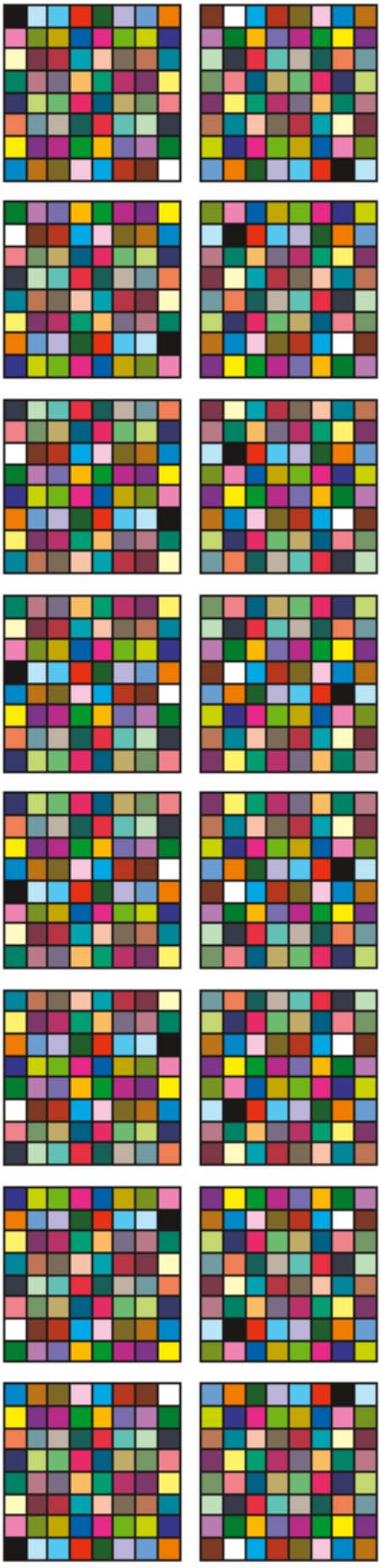
Eine Anordnung, welche die genannte Bedingung erfüllt, heißt lateinisches Quadrat. Der Name rührt daher, daß der berühmte Baseler Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783), der seit seinem 20. Lebensjahr in Sankt Petersburg, dann in Berlin und schließlich wieder in Sankt Petersburg wirkte und außer vielen anderen Dingen auch solche Quadrate systematisch untersuchte, lateinische Buchstaben anstelle der Farben verwendete.

Die Anzahl der Felder je Zeile beziehungsweise Spalte heißt Ordnung des Quadrats. Ein Quadrat der Ordnung n hat also n^2 Felder.

Wird zusätzlich gefordert, daß auch in den Diagonalen jede Farbe nur einmal vertreten ist, muß man das geschilderte Verfahren etwas abwandeln, denn es färbt alle Felder der Hauptdiagonale (von links oben nach rechts unten) gleich. Für Quadrate ungerader Ordnung versetze man die Felder beim Übergang von einer Zeile zur nächsten nicht um eins nach rechts, sondern um zwei; für gerade Ordnung ist die Situation komplizierter.

Interessanter wird das Problem, wenn jedes Feld zwei Kennzeichen trägt, etwa eine Innen- und eine Außenfarbe oder – wie bei Euler – einen lateinischen und einen griechischen Buchstaben. Dabei ist nicht nur verboten, ein Kennzeichen mehr als einmal in eine Zeile oder Spalte zu setzen; zusätzlich ist vorgeschrieben, daß jede Kombination von Kennzeichen nur einmal vorkommen darf. Ein griechisch-lateinisches Quadrat entspricht also einem Paar lateinischer Quadrate, die in gewissem Sinne so verschieden voneinander sind wie nur möglich: Beispielsweise müssen die Randflächen aller Felder, deren Innenfarbe Rot ist, sämtliche vorkommenden Farben tragen; ein Drittel Cyan. Cyan (ein heller Blauton), Magenta (Purpur) und Gelb und Schwarz sind die Druckfarben, aus denen zum Beispiel in dieser Zeitschrift alle Farben zusammengesetzt werden.

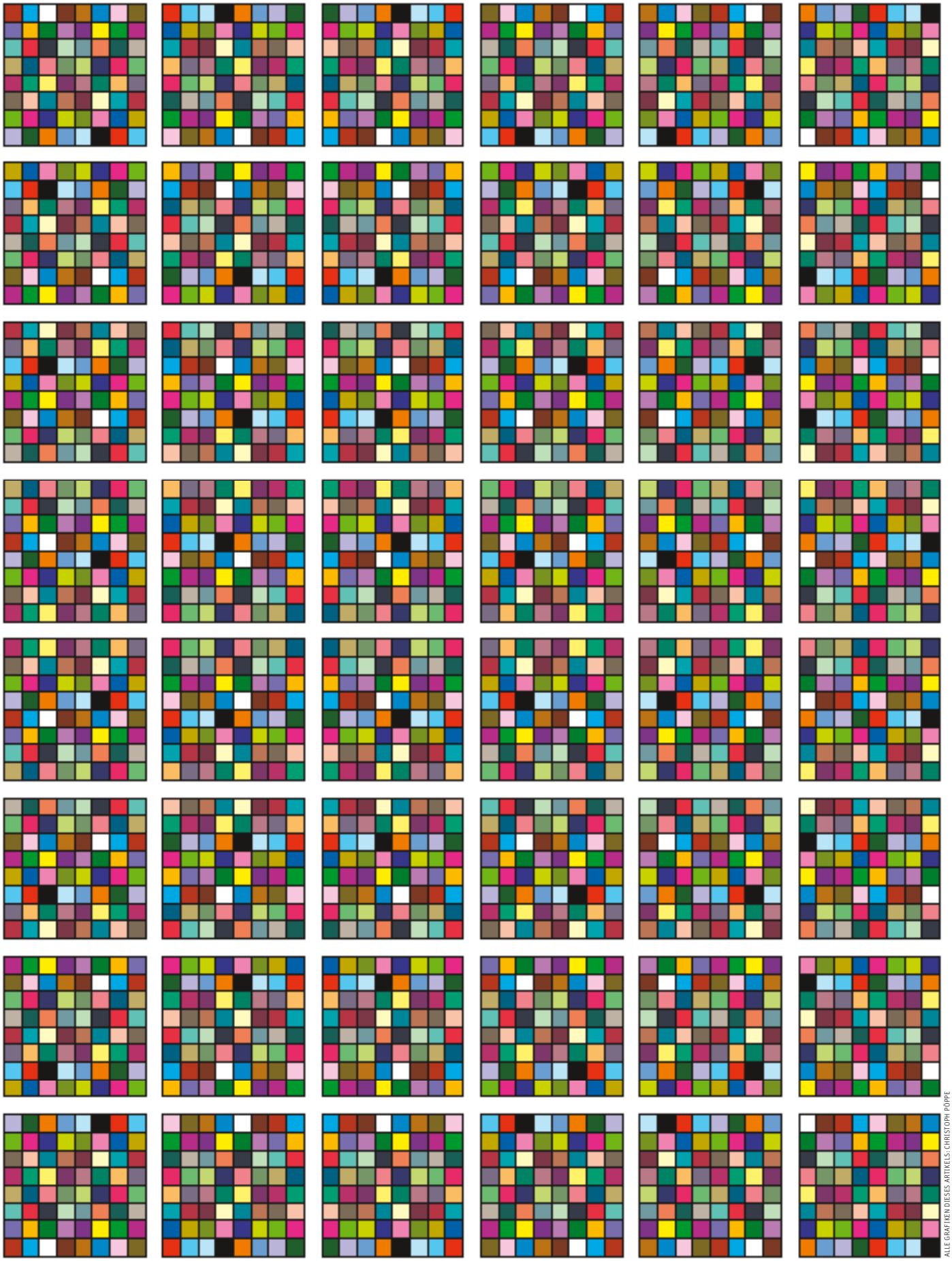
Die Binärzerlegung magischer Quadrate erlaubt eine Fülle von Umformungen, so daß man aus einem Quadrat mit Leichtigkeit 64 herleiten kann. Man beachte, daß das Gesamtbild spiegelsymmetrisch bezüglich der horizontalen und der vertikalen Mittelachse ist. Komplementäre (in bezug auf den Mittelpunkt gegenüberliegende) Felder jedes Einzelquadrats tragen komplementäre Farben, was in der Praxis wegen der Unvollkommenheiten der Farbwiedergabe nur näherungsweise erfüllt ist.



Magische Quadrate der Ordnung 8

Jedes dieser Quadrate enthält die Zahlen von 0 bis 63, so angeordnet, daß die Summe der Zahlen entlang jeder Zeile, Spalte und Diagonale dieselbe ist. Nach einer Idee des Künstlers Paul Heimbach stellt man nun diese Zahlen im Binärsystem dar und koloriert immer dann, wenn eine Binärstelle gleich 1 ist, das entsprechende Feld mit einer Farbe, die dieser Binärstelle zugeordnet ist; für Zahlen, die mehrere Einsen in der Binärdarstellung enthalten, mischen sich die zugehörigen Farben.

Im ersten Teilbild sind den Binärstellen von rechts nach links die folgenden Farben zugeordnet: zwei Drittel Gelb, ein Drittel Gelb, zwei Drittel Magenta, ein Drittel Magenta, zwei Drittel Cyan,



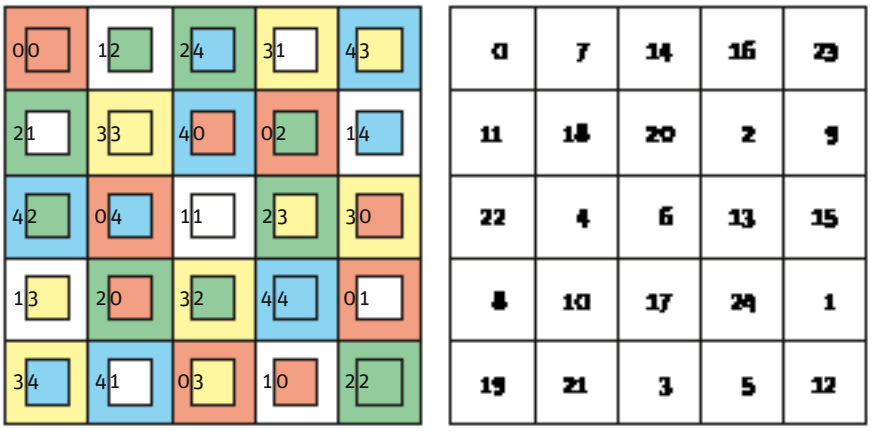
ALLE GRAFIKEN DIESES ARTIKELS: CHRISTOPH PÖPPE

sonst wäre eine Kombination doppelt vertreten. Ein solches Paar von Quadraten (eines besteht aus den Innenfarben, das andere aus den Außenfarben) heißt orthogonal – eine etwas weit hergeholte Metapher aus der Geometrie, wo zwei gleich lange Vektoren voneinander maximal verschieden sind, wenn sie aufeinander senkrecht (orthogonal) stehen.

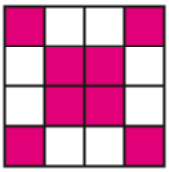
Ein Paar orthogonaler lateinischer Quadrate der Ordnung 5 ist noch mit mäßiger Mühe zu finden: Man nehme das Quadrat mit der Versetzung 2 und sein Spiegelbild, wobei die Hauptdiagonale Spiegelachse ist (oberes Bild auf dieser Seite, links). Für andere Ordnungen kann die entsprechende Aufgabe extrem schwierig werden. So glaubte Euler, es gebe keine griechisch-lateinischen Quadrate der Ordnungen 6, 10, 14 und so weiter (ungerade Vielfache von 2), weil er trotz intensiver Suche keine gefunden hatte. Bezüglich der Ordnung 6 hatte er recht; für die anderen Fälle hat es immerhin fast 200 Jahre gedauert, bis 1959 E. T. Parker von der Computerfirma Univac sowie R. C. Bose und S. S. Shrikande von der Universität von North Carolina (genannt »*Euler's spoilers*«, weil sie damit das ansonsten strahlende Bild ihres genialen Vorgängers ein wenig befleckt hatten) ein Gegenbeispiel fanden. Auf unserer Website www.spektrum.de (wählen Sie »Zum Knobeln« in der linken Randleiste und dann »Euler'sche Quadrate«) finden Sie Gelegenheit, ein griechisch-lateinisches Quadrat der Ordnung 10 selbst zu suchen.

Magische Quadrate

Wenn man aber erst ein orthogonales Paar lateinischer Quadrate hat, in dem außerdem jede Diagonale bei wenigstens einem Partner die Verschiedenheitsbedingung erfüllt, ist daraus mit leichter



Ein griechisch-lateinisches Quadrat der Ordnung 5: Man kann sich vorstellen (links), daß ein lateinisches Quadrat (kleine Felder) auf ein weiteres (mit großen Feldern) gelegt wird. In jeder Zeile, Spalte und Diagonale kommen die Außenfarbe (unteres Quadrat, linke Ziffer) und die Innenfarbe (oberes Quadrat, rechte Ziffer) genau einmal vor. Außerdem ist jede Kombination von Innen- und Außenfarbe genau einmal vertreten. Liest man die Ziffernpaare als zweistellige Zahlen zur Basis 5, so ergibt sich ein magisches Quadrat mit den Zahlen von 0 bis 24 (rechts).



Konstruktion eines magischen Quadrats mit der Ordnung $n = 16$: links der Stempel. Wenn man die Zeilen und Spalten des Quadrats jeweils von 0 bis $n-1$ numeriert, läßt sich die Stempelregel wie folgt formalisieren: Färbe das Feld in Zeile i, Spalte j genau dann, wenn $[(i+1)/2] + [(j+1)/2]$ gerade ist; die eckigen Klammern bedeuten Runden nach unten auf ganze Zahlen. Man schreibt die Zahlen von 0 bis $16^2 - 1 = 255$ in der natürlichen Reihenfolge zeilenweise in die Felder des Quadrats (links). Jede vom Stempel getroffene Zahl tauscht dann ihren Platz mit derjenigen, die zu ihr punktsymmetrisch bezüglich des Mittelpunkts liegt (rechts).

Mühe ein magisches Quadrat zu machen: Man ersetze die Kennzeichen (Farben oder Buchstaben) durch die Ziffern von 0 bis $n-1$ und schreibe in jedes Feld die beiden zugehörigen Ziffern nebeneinander. Die entstehenden zweistelligen Zahlen sind im Zahlensystem zur Basis n zu verstehen: In einem $5 \cdot 5$-Quadrat bezeichnet 32 die Zahl $3 \cdot 5 + 2$, also 17 in der üblichen Dezimalschreibweise (Bild links, rechtes Teilbild).

Warum ist das so konstruierte Quadrat magisch? Warum ist die Summe der Zahlen in jeder Zeile, Spalte und Diagonale die gleiche? Nun, in den Feldern jeder Zeile kommen in der rechten (Einer-)Stelle die Ziffern von 0 bis $n-1$ jeweils genau einmal vor, desgleichen in der linken Stelle; also ist (für $n=5$) die Zeilensumme jedesmal $(0+1+2+3+4) + 5 \cdot (0+1+2+3+4) = 60$. Für die Spalten- und Diagonalensummen gilt Entsprechendes. Außerdem – zweite Bedingung für magische Quadrate – ist jede Ziffernkombination und damit jede Zahl zwischen 0 und n^2-1 genau einmal vertreten.

Üblicherweise schreibt man in ein magisches Quadrat der Ordnung n nicht die Zahlen von 0 bis n^2-1, sondern von 1 bis n^2. Aber ob man zum Wert jedes Feldes 1 addiert oder nicht, ist für die Eigenschaft »magisch« unwesentlich; und für das Folgende ist es geschickter, bei 0 anzufangen. Die magische Konstante (der gemeinsame Wert aller Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen) eines Quadrats der Ordnung n ist dann nicht, wie üblich, $n(n^2+1)/2$, sondern $n(n^2-1)/2$.

Magische Quadrate haben eine uralte Geschichte. Aus der Zeit des chinesischen Kaisers Lo-Shu (um 2200 vor Christus) ist ein magisches Quadrat dritter Ordnung überliefert. Die europäische Tradition hat jahrhundertelang von einem Manuskript eines Gelehrten namens Manuel Moschopoulos gezehrt, der Anfang des 15. Jahrhunderts in Konstantinopel lebte. In diesem Manuskript sind bereits Konstruktionsregeln für magische Quadrate jeder Ordnung aufgeführt. Cornelius Agrippa von Nettesheim (1486–1535) konstruierte magische Quadrate der Ordnungen 3 bis 9, anscheinend nach den Methoden des Moschopoulos, setzte sie mit den Planeten (im damaligen Verständnis) Saturn, Jupiter, Mars, Sonne, Venus, Merkur und Mond – in dieser Reihenfolge – in Beziehung und leitete daraus im Wortsinne magische Eigenschaften der Planeten und der Quadrate her. Berühmt geworden ist das magische Quadrat vierter Ordnung aus dem Bild »Melencolia« von Albrecht Dürer (1471–1528); es ist so arrangiert, daß das Entstehungsjahr 1514 in der Mitte der untersten Zeile erscheint.

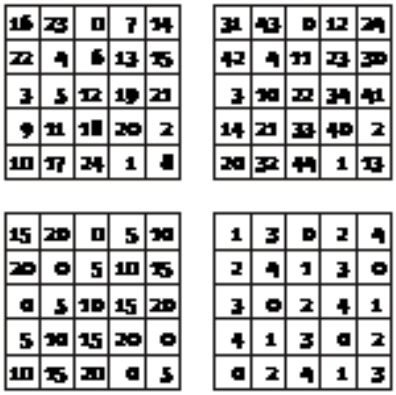
Das Konstruktionsverfahren über die griechisch-lateinischen Quadrate ist nicht unbedingt das einfachste. Es liefert jedoch ein instruktives Beispiel für eine bisher kaum beachtete Eigenschaft mancher magischen Quadrate: ihre Zerlegbarkeit.

Magische Quadrate ungerader Ordnung

Ein französischer Adliger namens S. de la Loubère wäre heute sicherlich weithin vergessen, wenn er nicht als Gesandter Ludwigs XIV. beim König von Siam (dem heutigen Thailand) 1687 bis 1688 ein Verfahren zur Konstruktion magischer Quadrate ungerader Ordnung kennengelernt und später veröffentlicht hätte. Der Einheitlichkeit halber wird das Verfahren hier mit den Zahlen von 0 bis n^2-1 statt von 1 bis n^2 beschrieben; die ungerade Zahl n ist die Ordnung des Quadrats.

Man fasse das Quadrat als Torus auf, das heißt, rechte und linke sowie obere und untere Seite sind miteinander verklebt. Alle Zeilen und Spalten sind dadurch ringförmig geschlossen: Auf das letzte Feld einer Zeile folgt wieder das erste, entsprechend für Spalten. Es läuft auf dasselbe hinaus, wenn man sich die ganze Ebene mit unendlich vielen Exemplaren des einen Quadrats gepflastert denkt.

In das mittlere Feld der ersten Zeile schreibe man die Null und dann die folgenden Zeilen der Reihe nach, jede schräg rechts über ihre Vorgängerin. Wegen der Torus-Eigenschaft gerät die Eins in die unterste Zeile, eins rechts von der Mitte. Entsprechend muß man das Quadrat jedesmal, wenn man seinen Rand überschreitet, an der gegenüberliegenden Seite wieder betreten.

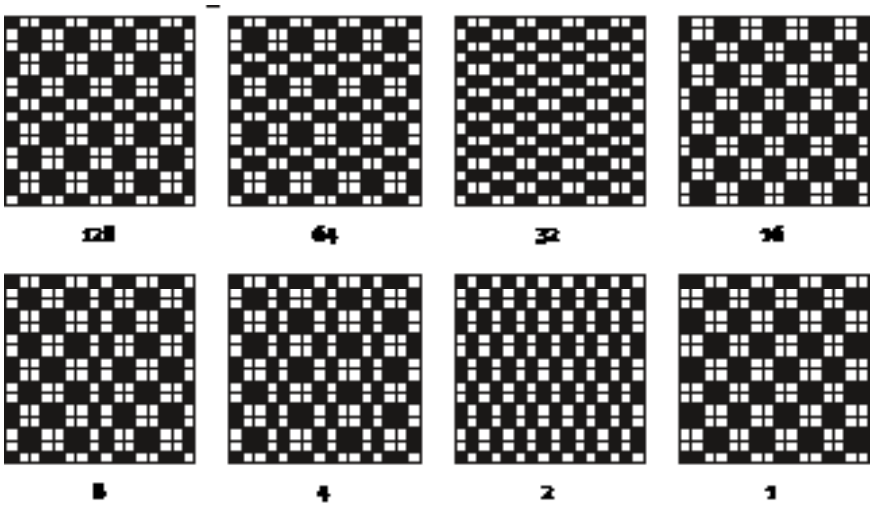


Folgt man dieser Regel, dann müßte man die Zahl n in das Feld schreiben, in dem schon die Null steht. Wenn eine solche Kollision droht (das ist bei allen Vielfachen von n der Fall), geht man ausnahmsweise einen Schritt nach unten statt nach rechts oben; im übrigen folgt man der Standardregel, bis alle Felder besetzt sind (links oben).

Das entstehende Quadrat ist nicht nur magisch, sondern auch symmetrisch: Ein Feld und sein Bild bezüglich Punktspiegelung am Mittelpunkt des Quadrats ergänzen sich stets zu n^2-1. Außerdem ist es pandiagonal: Aus der mit unendlich vielen Exemplaren gepflasterten Ebene kann man an beliebiger Stelle ein $n \cdot n$-Quadrat ausstanzen, das ebenfalls magisch ist.

Schreibt man die Zahlen des Quadrats zur Basis n (hier für $n=5$ dargestellt, rechts oben), so erkennt man, daß es in zwei orthogonale lateinische Quadrate zerlegbar ist. Das eine (links unten), entsprechend den linken Ziffern, enthält die Zahlen 0, n, $2n$, … , $(n-1)$n, und eine Zeile entsteht aus der vorigen durch Versatz um eins nach links. Das andere (rechts unten) ist Spiegelbild bezüglich der Hauptdiagonalen eines lateinischen Quadrats aus den Zahlen 0 bis $n-1$ mit Versatz um zwei nach links. Das erste Quadrat ist nicht lateinisch bezüglich der Nebendiagonalen (von links unten nach rechts oben); dort steht an jeder Stelle $n(n-1)/2$. Aber dieser Mangel wird dadurch kompensiert, daß die entsprechende Diagonale des zweiten Quadrats vorschriftsgemäß ist.

Varianten des Verfahrens arbeiten mit anderen Kombinationen von Standardschritt (hier rechts aufwärts) und Ausweichschritt (hier abwärts). Damit sich die Zahlenschlange nicht vorzeitig in den Schwanz beißt, müssen gewisse Kombinationen aus Standard- und Ausweichschrittzahlen teilerfremd zu n sein.



Das im Bild auf S. 16 unten konstruierte magische Quadrat der Ordnung 16 zerfällt in acht trivial-magische Quadrate, die hier schematisch dargestellt sind. Ein weißes Feld steht für 0, ein schwarzes für die Zahl, die jeweils unter dem Quadrat angegeben ist. In jeder Zeile, Spalte und Diagonale stehen gleich viele weiße wie schwarze Quadrate.

Ich nenne ein magisches Quadrat edel, wenn es nach Art eines griechisch-lateinischen Quadrats zusammengesetzt ist, genauer: wenn es in eine Summe zweier (oder mehrerer) trivial-magischer Quadrate zerlegbar ist. Dabei soll ein Quadrat trivial-magisch heißen, wenn es gleiche Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen hat; es muß nicht aus lauter verschiedenen Zahlen bestehen, noch nicht einmal lateinisch sein. Ein Quadrat, das in jedem Feld dieselbe Zahl trägt, ist trivial-magisch. Ein lateinisches Quadrat ist nur dann trivial-magisch, wenn auch entlang seiner Diagonalen keine zwei Felder gleich sind.

Für die Konstruktion eines edlen Quadrats muß man, wie gesagt, nicht unbedingt griechisch-lateinische zu Hilfe nehmen. So produziert die einfachste Konstruktionsregel für magische Quadrate ungerader Ordnung stets edle Quadrate (Kasten S. 17).

Das Austauschverfahren

Zerlegungen anderer magischer Quadrate ergeben Komponenten, die nicht lateinisch sind, dafür aber andere, um so interessantere Eigenschaften haben. Eine Konstruktionsregel für magische Quadrate, deren Ordnung ein Vielfaches von 4 ist, liefert Beispiele. Das Dürer-Quadrat sowie das Jupiter- und das Merkur-Quadrat des Agrippa von Nettesheim sind – bis auf Drehungen, Spiegelungen und das Addieren der obligatorischen Eins – nach diesem Muster gebaut.

Wesentlicher Bestandteil des Verfahrens ist ein (gedachter) Stempel, der die acht Diagonalenfelder eines $4 \cdot 4$-Quadrats einfärbt und die restlichen acht unverändert läßt (Bild S. 16 unten). Man schreibt zunächst in ein Quadrat der Seitenlänge n – wobei n ein beliebiges Vielfaches von 4 ist – die Zahlen von 0 bis n^2-1 zeilenweise der Reihe nach ein und bestempelt es dann lückenlos und überlappungsfrei. Jede durch den Stempel gefärbte Zahl vertauscht man nun mit der ebenfalls gefärbten, die ihr in bezug auf den Mittelpunkt des Quadrats genau gegenüberliegt. Beide Zahlen ergänzen sich stets zu n^2-1; man nennt solche Paare komplementär.

Ohne Zweifel enthält das Endprodukt dieser Prozedur nach wie vor alle Zahlen von 0 bis n^2-1; es hat ja nur die Hälfte von ihnen die Plätze getauscht. Es bleibt auch symmetrisch in dem Sinne, daß Paare komplementärer Zahlen einander bezüglich des Mittelpunktes genau gegenüberstehen.

Aber wie kommt es, daß alle Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen den richtigen Wert haben? Man kann nachrechnen, daß das bei den Diagonalen schon vorher der Fall war; und das Verfahren stellt beide Diagonalen lediglich auf den Kopf, denn alle Diagonalenfelder werden vom Stempel getroffen. Dagegen sind in der ursprünglichen Anordnung die Summen der oberen Zeilen zu klein und die der unteren zu groß; Entsprechendes, wenn auch weniger kraß, gilt für die Summen der Spalten links beziehungsweise rechts von der Mitte. Die Vertauschungsaktion gleicht diese Abweichungen gerade aus.

Wie das genau funktioniert, sieht man am besten an Quadraten, deren Ordnung eine Potenz von 2 ist: 4, 8, 16, 32 und so weiter. In diesem Falle ist nämlich auch n^2 eine Zweierpotenz, und es liegt nahe, zur Zahldarstellung die Basis 2 zu verwenden. Das läuft auf die computerübliche Binärschreibweise hinaus, deren einzige Ziffern 0 und 1 sind. Ein magisches Quadrat der Ordnung 16 enthält die Zahlen von 0 bis $16^2-1=255$; das sind gerade alle achtstelligen Binärzahlen (führende Nullen mitgeschrieben). Und ebenso, wie man das eingangs beschriebene $5 \cdot 5$-Quadrat, zur Basis 5 geschrieben, in zwei trivial-magische Quadrate zerlegen kann, deren jedes einer Stelle in der Zahldarstellung zugeordnet ist, so zerfällt das $16 \cdot 16$-Quadrat in acht trivial-magische Quadrate, deren jedes zu einer Binärstelle gehört (Bild links oben): Es ist edel zur Basis 2.

Alle diese Komponenten-Quadrate enthalten nur Nullen und Einsen; weil aber die Eins je nach Komponente eine, zwei oder mehr Stellen links vom (gedachten) Binär-Komma steht, hat sie den Wert 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 oder 128. Die Komponenten-Quadrate zeigen ein auffälliges, regelmäßiges, aber nicht ganz symmetrisches Muster; daran ist zu erkennen, daß das ursprüngliche magische Quadrat eine globale Ordnung aufweist. Die Symmetrie ist aber gerade nicht so umfassend, daß ein und dieselbe Kombination schwarzer und weißer Felder an mehr als einer Position aufträte. Denn dann hätten diese beiden Felder den gleichen Zahlenwert, was nicht sein darf.

Wie kommt diese Ordnung zustande? Es ist sehr einfach, die zu einer Binärzahl komplementäre Zahl zu finden. Für $n=2^4=16$ beispielsweise ist $n^2=2^8=256$, und $n^2-1=255$ hat die Binärdarstellung 11 111 111. Zwei achtstellige Binärzahlen sind genau dann komplementär bezüglich 2^8-1, wenn die eine da eine Null hat, wo in der anderen eine Eins steht, und umgekehrt. Die Wirkung des Stempels – die Bildung der Komplementärzahl – besteht also darin, daß jede Null in der Binärdarstellung durch eine Eins ersetzt wird und umgekehrt. Insbesondere wirkt der Stempel auf jede Binärstelle – und damit auf jedes Komponenten-Quadrat – unabhängig von den anderen:

Wo er trifft, vertauscht er Schwarz und Weiß. Somit genügt es, sich zu vergewissern, daß der Stempel aus jeder Zerlegungs-Komponente des Quadrats, mit dem alles begann (mit den Zahlen in der natürlichen Reihenfolge), ein trivial-magisches Quadrat macht (Kasten unten).

Umformungen

Hat man erst einmal ein magisches Quadrat, so kann man daraus durch einfache Umformungen viele neue machen. Eine, zwei oder drei Vierteldrehungen sowie Spiegelungen an einer Diagonalen oder Mittelsenkrechten lassen die magischen Eigenschaften unverändert. Das gleiche gilt für kompliziertere Operationen wie die gleichzeitige Vertauschung zweier komplementärer Spalten und der beiden zugehörigen Zeilen oder eine weitere, bei der ganze Viertel eines Quadrats in die diagonal gegenüberliegende Ecke geschoben werden (Bild S. 20).

Das Sortiment der Umformungsmöglichkeiten wird durch Zerlegungen erheblich erweitert, weil die Komponenten einer Zerlegung bis zu einem gewissen Grade voneinander unabhängig sind. Wenn die Komponenten lateinische Quadrate sind, die auch in den Diagonalen keine zwei gleichen Elemente enthalten, darf man in jeder Komponente die Numerierung beliebig ändern. Jede Ziffer darf durch eine andere, nur dürfen nicht zwei verschiedene Ziffern durch dieselbe ersetzt werden: eine Permutation. Im zusammengesetzten Quadrat tauschen dadurch zwar gewisse Zahlen ihre Plätze, aber es stehen dieselben Zahlen im Quadrat wie zuvor, und die Summenkriterien sind immer noch erfüllt, weil das für die Komponenten gilt. Wenn, wie beim Standardverfahren für Quadrate ungerader Ordnung, eine Diagonale n-mal die Zahl $(n-1)/2$ enthält, muß man diese Zahl unverändert lassen, darf aber die übrigen unbekümmert permutieren.

Bei den 0-1-Komponenten-Quadraten der Binärdarstellung ist die einzig mögliche Permutation die Vertauschung von Schwarz und Weiß. Immerhin ergibt das für die acht Komponenten des 16·16-Quadrats $2^8 = 256$ Kombinationen. Insbesondere kann man durch geeignete Wahl der Vertauschungen erzwingen, daß eine vorgewählte Zahl in die linke obere Ecke (oder in irgendein anderes vorbestimmtes Feld) gerät.

Der Kölner Künstler Paul Heimbach hat dieses Prinzip für Quadrate der Ordnung 8 entdeckt, für seine ästhetischen Ziele genutzt und damit den Anstoß zu diesem Artikel gegeben. Er interpretiert die sechs Komponenten des 8·8-Quadrats als Masken oder Schablonen, Platten, die anstelle der schwarzen Felder quadratische Löcher enthalten. Eine Maske nach der anderen legt er auf ein Blatt Papier und überstreicht sie mit (nicht-deckender) Farbe – jede Maske mit einer anderen. Heimbach verwendet die Grundfarben Rot, Blau und Gelb in jeweils zwei verschiedenen Intensitäten. (So ist das Prinzip; die Ausführung kann völlig anders sein.) Am Ende ergibt sich ein magisches Farbquadrat: Jede Mischung von null bis zu sechs Maskenfarben ist auf genau einem Feld realisiert. Zusätzlich ist das Gesamtbild auch noch ausgewogen in dem Sinne, daß jede Maskenfarbe in jeder Zeile und jeder Spalte in genau der Hälfte der Felder enthalten ist (Bild S. 14/15).

Damit sind die Umformungsmöglichkeiten noch längst nicht erschöpft. Die Zuordnung der Masken (und ihrer Farben) zu den Binärstellen ist nämlich keineswegs zwingend. Was geschieht, wenn man beispielsweise die zweite und die vierte Maske vertauscht?

An den Stellen, wo beide Masken schwarz oder beide weiß sind, ändert sich gar nichts. Eine Zahl, bei der eine Maske weiß, die andere schwarz ist, tauscht ihren Platz mit derjenigen, die in diesen beiden Masken die umgekehrte Kombination, in allen anderen aber denselben Wert hat. Also sind nach wie vor dieselben Zahlen im Quadrat vertreten, und die Summenkriterien sind ohnehin erfüllt.

Für das Merkur-Quadrat (Ordnung 8) vermehren sich die Variationsmöglichkeiten durch die Vertauschbarkeit der Masken um den Faktor $6! = 720$. Eine von Heimbach erstellte Compact Disc spielt das ganze Sortiment der so erhältlichen Varianten ab.

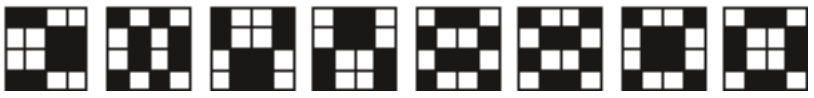
Aus einem einzigen edlen Quadrat der Ordnung 16 ergibt sich durch Umkehrung von Schwarz und Weiß sowie durch Vertauschung von Masken ein reichhaltiges Sortiment von insgesamt $256 \cdot 8! = 10\,321\,920$ Varianten.

Das Vertauschungsverfahren – bitweise

Sei *n* ein Vielfaches von 4. Wenn man die Zahlen von 0 bis n^2-1 zeilenweise der Reihe nach in ein $n \cdot n$-Quadrat schreibt, wechseln sich Spalten aus geraden und solche aus ungeraden Zahlen ab: Die letzte Binärziffer wechselt bei jedem Übergang von einer Zahl auf die nächste. Die vorletzte bleibt immer zwei Felder lang gleich, bevor sie wechselt, die drittletzte jeweils vier Felder, die viertletzte acht und so weiter. Jede Zeile beginnt mit einem Vielfachen von 4. Deswegen tragen die 4·4-Teilquadrate, die jeweils von einem Stempelabdruck getroffen werden, sämtlich die folgende Struktur (schwarz = 1, weiß = 0):

letzte (Einer-) Stelle | vorletzte (Zweier-) Stelle | drittletzte (Vierer-) und alle weiteren Stellen: eine der sechs folgenden Strukturen

Die Ersetzung durch die jeweils komplementäre Zahl macht weiß zu schwarz und umgekehrt – aber nur in den gestempelten Feldern:

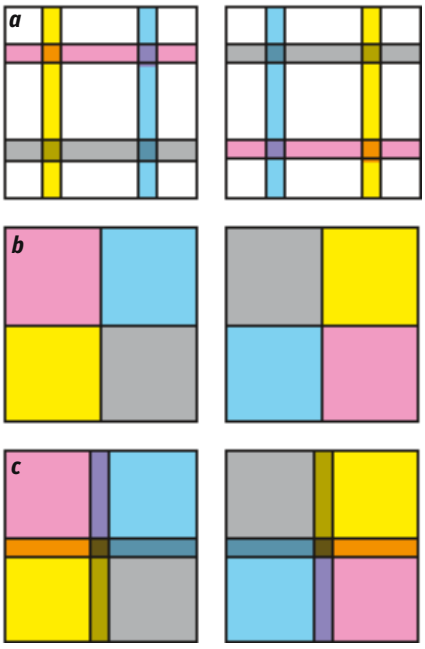


In jedem der Fälle ist das entstehende Quadrat trivial-magisch bezüglich Zeilen und Spalten. Setzt man die 4·4-Quadrate wieder zu dem großen Quadrat zusammen, ergeben sich auch dort gleiche Zeilen- und Spaltensummen. Nur die Diagonalen sind in manchen gestempelten 4·4-Quadraten gänzlich schwarz oder gänzlich weiß; aber das wird dadurch kompensiert, daß das komplementäre (bezüglich des Mittelpunktes gegenüberliegende) 4·4-Quadrat gänzlich weiße beziehungsweise gänzlich schwarze Diagonalen hat.

Bis jetzt habe ich gezeigt, wie man edle Quadrate konstruiert, deren Ordnung ungerade oder eine Zweierpotenz ist. Was ist mit den übrigen Ordnungen?

Verallgemeinerungen

Man kann magische Quadrate in einem gewissen Sinne miteinander multiplizieren, und das Produkt zweier edler Quadrate ist wieder edel, wenn man die richtige Zerlegung wählt. Wie multipliziert man ein Quadrat der Ordnung p mit einem der Ordnung q (es kommt auf die Reihenfolge der Faktoren an)? Man bläht jedes Feld des $p \cdot p$-Quadrats zu einem Block der Größe $p \cdot q$ auf. In alle Felder eines Blocks schreibt man dieselbe Zahl, und zwar q^2 mal den ursprünglichen Wert des Feldes. Dann addiert man zu jedem Block – Feld für Feld – das $q \cdot q$-Quadrat. Das so konstruierte Quadrat hat die Ordnung pq und ist magisch, denn es enthält jede Zahl von 0 bis $(pq)^2-1$ genau einmal und erfüllt die Summenkriterien.



Ein magisches Quadrat bleibt magisch, wenn man eine Spalte mit der dazu komplementären (das heißt mit ihrem Spiegelbild bezüglich der Mittelachse) vertauscht und ein gleiches mit den entsprechenden Zeilen tut (a; die Teile, die bewegt wurden, sind farbig markiert, gleiche Farben entsprechen jeweils gleichen Teilen). Ein magisches Quadrat gerader Ordnung bleibt magisch, wenn man es in 2 · 2 Teilquadrate zerlegt und jedes mit dem diagonal gegenüberliegenden vertauscht *(b)*. Gleiches gilt für Quadrate ungerader Ordnung, wenn man die mittlere Zeile und die mittlere Spalte gesondert behandelt *(c)*.

Um nachzuweisen, daß es auch edel ist, muß man es zerlegen. Dafür gibt es ein Verfahren, das auf magische Quadrate aller Art (auch unedle) anwendbar ist: die Division mit Rest.

Man zerlege bei einem Quadrat der Ordnung n die Zahl n^2 irgendwie in Faktoren, bei ungeradem n zum Beispiel in $n \cdot n$, bei einer Zweierpotenz in $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$. Es muß nicht die Primfaktorzerlegung sein, und die Reihenfolge der Faktoren ist – zunächst – beliebig. Man dividiere nun das magische Quadrat Feld für Feld durch den ersten Faktor, schreibe die Quotienten in ein weiteres Quadrat und die Reste in ein drittes.

Das Quotienten-Quadrat dividiere man in derselben Weise durch den zweiten Faktor; das ergibt wieder ein Quotienten- und ein Restequadrat, und so weiter, bis die Faktoren erschöpft sind. Die mit den jeweils korrekten Faktoren multiplizierten Restequadrate ergeben eine Zerlegung des ursprünglichen Quadrats. Allerdings sind im allgemeinen die Restequadrate nicht trivial-magisch.

Dieses Divisionsverfahren läuft auf eine Darstellung der Zahlen des Quadrats bezüglich einer gemischten Basis hinaus (Spektrum der Wissenschaft, Dezember 1995, S. 10); die oben besprochenen Zerlegungen zu den reinen Basen 5 und 2 sind Spezialfälle. Auch in einer Zerlegung zu einer gemischten Basis darf man die Reihenfolge der Komponenten vertauschen, was zugleich ihren Stellenwert ändert; ein edles Quadrat verwandelt sich dadurch in ein anderes, gleichfalls edles.

Warum? Man zerlege das oben definierte Produktquadrat aus edlen Quadraten der Ordnungen p und q bezüglich der Faktoren q, q, p, p (in dieser Reihenfolge). Die ersten beiden Divisionen spalten den Anteil ab, der aus der Addition des $q \cdot q$-Quadrats zu jedem Block stammt; also bestehen die zugehörigen Restequadrate aus der $(p \cdot p)$-fachen Wiederholung der Komponentenquadrate des $q \cdot q$-Quadrats. Die waren nach Voraussetzung trivial-magisch; also gilt das auch für ihre Wiederholung. Was nach den beiden ersten Divisionen übrigbleibt, ist das aufgeblähte $p \cdot p$-Quadrat. Dessen Zerlegung produziert aufgeblähte Varianten der Komponenten des $p \cdot p$-Quadrats, die offensichtlich ebenfalls trivial-magisch sind. Wenn die ursprünglichen Quadrate nicht nur edel bezüglich der Zerlegungen p, p beziehungsweise q, q sind, sondern – wie die Zweierpotenz-Quadrate – noch feinere Zerlegungen zulassen, bleiben diese Feinheiten bei der Multiplikation erhalten.

Mit dem Multiplikationsverfahren erreicht man eine Fülle von Ordnungen, jedoch nicht die ungeraden Vielfachen von 2; denn ein magisches Quadrat der Ordnung 2 gibt es nicht. Es gibt ein Verfahren, aus einem magischen Quadrat eines doppelter Ordnung zu machen; leider enthält es – in seiner Ausgestaltung für ungerade Ordnung – eine Asymmetrie, die eine edle Zerlegung zu vereiteln scheint. Immerhin gibt es ein magisches Quadrat der Ordnung 6, das edel bezüglich der Zerlegung 6, 6 ist (nicht aber bezüglich 2,2,3,3 – in irgendeiner Reihenfolge). Allerdings sind seine Komponenten nicht einmal annähernd lateinisch, so daß die Permutationsmöglichkeiten recht beschränkt sind.

Hier bleibt noch viel zu tun. ◁

LITERATURHINWEISE

Magische Quadrate / Eulersche Quadrate. Kapitel XII (S. 1) und XIV (S. 55) in: Mathematische Unterhaltungen und Spiele, Band II. Von W. Ahrens. 2. Auflage, Teubner, Leipzig 1918

Historische Studien über die magischen Quadrate. Von Siegmund Günther. Kapitel IV (S. 188) in: Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Teubner, Leipzig 1876

Magic Squares. Kapitel VII (S. 193) in: Mathematical Recreations and Essays. Von W. W. Rouse Ball und H. S. M. Coxeter. 13. Auflage, Dover, Mineola 1987

New Recreations with Magic Squares. Von William H. Benson und Oswald Jacoby. Dover, New York 1976

Latin Squares and their Applications. Von Joszef Dénes und Anthony D. Keedwell. English Universities Press, London 1974

Mathematical Games. Von Martin Gardner in: Scientific American, November 1959, S. 181

De quadratis magicis. Von Leonhard Euler (1776). Abgedruckt in: Leonhardi Euleri opera omnia, Serie I, Bd. 7, S. 441. Teubner, Leipzig 1923

Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques. Von Leonhard Euler (1782). Abgedruckt im selben Band, S. 291

Magic Squares. Kapitel VII (S. 142) in: Mathematical Recreations. Von Maurice Kraïtchik. 2. Auflage, Dover, New York 1953

Magische Quadrate. Von Paul Heimbach. http://artype.de/quadrate/index.html